Lycée secondaire	**Fiche de cours**	**Prof : Selmi.Ali**
Mareth	**<u>Thème</u>** : integrales	**4ième Math**

I- <u>Intégrale d'une fonction continue :</u>

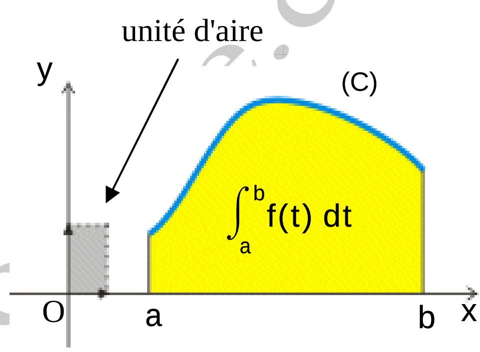
1) Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I
et F une primitive de f sur I
on appelle intégrale de f entre a et b le réel défini par F(b) – F(a) et noté $\int_a^b f(t)dt$

Donc $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

2) Interprétation graphique :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$
et F une primitive de f sur $[a,b]$.
Soit C la courbe de f dans un repère orthogonal
L'aire de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses
et les droites d'équations x = a et x = b
est le réel F (b) – F (a) qui est appelé intégrale de f de a à b
et il est noté $\int_a^b f(x)\,dx$.



II-<u>Propriétés algébriques :</u>

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a , b et c trois réels de I alors :

* $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
* $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
* $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ (relation de Chasles)

Théorème de linéarité :

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ pour tous réels α et β :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

Définition : (le plan est muni d'un repère orthogonal)

1) Soit f une fonction continue sur$[a,b]$, l'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b est le réel : $\int_a^b |f(x)|\,dx$

2) Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, l'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f et g et les droites d'équations x = a et x = b est le réel :$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$

III- <u>Intégrales et Intégralités :</u>

Théorème : <u>Positivité de l'intégrale</u>

Soit une fonction, *f*, continue sur un intervalle I ; pour tous nombres réels *a* et *b* de I tels que $a \le b$.

Si f (x) ⩾ 0 sur [*a* ; *b*], alors : $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

Conséquence : respect de l'ordre par intégration.

- Soit deux fonctions, f et g, continues sur un intervalle I ; pour tous nombres réels a et b de I tels que $\boldsymbol{a \leq b}$. Si $f \leq g$ sur I, alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$
- Soit f une fonction continue sur$[\,a,b]$, on a $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$

IV- Valeur moyenne et Inégalités de la moyenne :

Définition : Soit f une fonction *continue et positive* sur [a ; b].

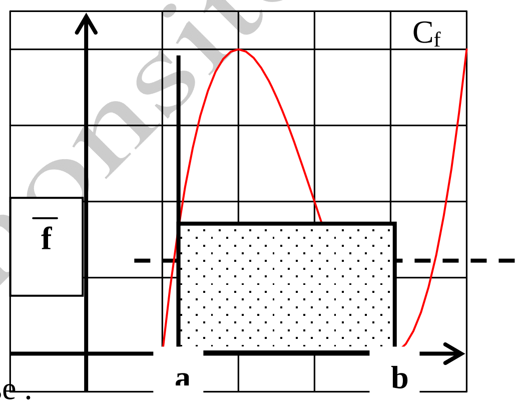
La valeur moyenne de f sur [a ; b] est le réel $\mathbf{\bar{f} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}$.

Interprétation graphique :

Puisque $\displaystyle\int_a^b \bar{f}\,dx = \bar{f}(b-a)$, on a donc $\displaystyle\int_a^b \bar{f}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Ainsi, l'aire du domaine associé à une fonction f sur [a ; b] est

égale à celle du rectangle de dimensions $\bar{f}$ et b – a.



Interprétation cinématique :

La vitesse moyenne d'un mobile est la valeur moyenne de la vitesse.
En effet, avec la notation donnée, on a :

$$\textit{vitesse moyenne} = \frac{\textit{distance parcourue}}{\textit{durée du trajet}} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt \ = \textit{valeur moyenne de la vitesse.}$$

Inégalités de la moyenne :

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I.

- Si, pour tout x de I, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ et $\underline{\mathbf{a \leqslant b}}$, alors : $m(b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$.
- Si, pour tout x de I, $|f(x)| \leqslant M$, alors $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant M|b-a|$.

V – Techniques de calcul d'intégrales

❶ Au moyen d'une primitive

Exemples : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t\,dt = \left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$; $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t\,dt = \left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt = \left[\frac{1}{\cos t}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2 - 1 = 1$; $\displaystyle\int_{-3}^{0} (x^3 + 2x^2 - 1)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - x\right]_{-3}^{0} = 0 - \left(\frac{81}{4} - 18 + 3\right) = -\frac{21}{4}$

⇨ **Intégrations par parties**

Soient u et v deux fonctions dérivables à dérivées continues sur un intervalle I et a et b deux réels de I. On a : $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$.

VI- <u>Fonctions définies par intégrales</u> :

<u>Théorème</u> : Soit f une fonction <u>continue</u> sur un intervalle I et a un élément de I.

La fonction F définie sur I par $\mathbf{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a

<u>Conséquence</u>

Soit f une fonction <u>continue</u> sur un intervalle I et a un élément de I.

La fonction F définie sur I par $\mathbf{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$ est donc dérivable sur I et de dérivée f.

<u>Théorème</u> :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , u une fonction dérivable sur J tel que u(J) $\subset$ I et a $\in$ I

La fonction F définie sur J par $\mathbf{F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)\,dt}$ est donc dérivable sur J et **F'(x) = u'(x).f(u(x))**

<u>Conséquence</u>

⇨ Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0

- ✓ Si f est impaire alors $\mathbf{\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0}$, $\forall$ a $\in$ I
- ✓ Si f est paire alors $\mathbf{\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt}$, $\forall$ a $\in$ I

⇨ Soit f une fonction continue sur ℝ et périodique de période T

Alors pour tout a $\in$ℝ on a $\mathbf{\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt}$

VII- <u>Calculs de volumes de solides de révolutions</u> :

L'espace est muni d'un repère orthonormé (0 , $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

Soit f une fonction continue sur[a,b], le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ = $\{$ M(x,y) tel que y = f(x) et a $\leqslant$ x $\leqslant$ b$\}$ autour de l'axe (0 , $\vec{i}$) est le réel

V = $\pi\mathbf{\int_a^b f^2(x)\,dx = 0}$

Courbe	Solide de révolution engendré par cette courbe